

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluții

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$. Se verifică prin calcul că $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2$.

b) $\text{tr}(A) = 0 \Rightarrow A^2 = -\det A \cdot I_2$. Atunci $A^2 \cdot B = B \cdot A^2 = -(\det A) \cdot B$

c) $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow A^2 B - \text{tr}(A) \cdot AB + (\det A) \cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la dreapta cu B).

$A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2 \Rightarrow BA^2 - \text{tr}(A) \cdot BA + (\det A) \cdot B = 0_2$ (prin înmulțire la stânga cu B).

Scăzând relațiile de mai sus rezultă $\text{Tr}(A) \cdot (AB - BA) = 0_2 \Rightarrow AB = BA$.

2. a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = 10$.

b) $(X-1)(X-3) \mid f \Rightarrow f(1) = f(3) = 0$. Obținem $a = -14, b = 6$.

c) Fie u, v cele două rădăcini duble ale polinomului f ; din relațiile lui Viète rezultă $2(u+v) = 6$ și $u^2 + v^2 + 4uv = 13$. Atunci $uv = 2$; $u = 1, v = 2$, de unde $a = -12, b = 4$.